

Evaluación Experimental de Controladores Tipo PID de Posición Aplicados a un Sistema de Suspensión Magnética *

Javier Ollervides, Alfredo Camarillo, Víctor Santibáñez y Alejandro Dzul

Instituto Tecnológico de la Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación,
Calz. Cuauhtémoc y Blvd. Revolución, Torreón, Coah., México
<http://www.itlalaguna.edu.mx>
{jollervi, vsantiba}@itlalaguna.edu.mx, {jacamarillo, dzul}@faraday.itlalaguna.edu.mx

Resumen En este trabajo se presenta un estudio teórico y experimental de dos controladores tipo PID (proporcional+integral+derivativo) aplicados en un sistema de suspensión (o levitación) magnética. El primer esquema de posicionamiento abordado aquí es el controlador PID en modo fuerza, y el segundo es el controlador PID en modo velocidad. El principal ingrediente de aportación de este trabajo consiste en la evaluación de resultados experimentales en tiempo real, que satisfacen el comportamiento del modelo dinámico.

1. Introducción

El control lineal de posición de sistemas de levitación magnética (MagLev) es ampliamente abordado en la literatura, desde diversos puntos de vista. En este trabajo se estudian dos controladores de tipo PID de posición, detallando la descripción del método sistemático de ubicación de polos de lazo cerrado, para realizar la sintonización de ganancias de estos controladores, a partir de un modelo dinámico linealizado (bajo ciertas condiciones de operación) del sistema de suspensión magnética. La existencia de trabajos de investigación en la literatura, que abordan la problemática de control de sistemas MagLev (similares al abordado aquí), y que se utilizan como referencia en este trabajo son: [2], [6], [7], [8], [10] y [11].

2. Modelo dinámico del sistema MagLev

El MagLev puede ser visto como un sistema electromecánico, que se compone de un rotor traslacional sin fricción (esfera metálica), que se desplaza por debajo de un electromagneto sostenido por un pedestal, tal y como se muestra en la Figura 1.

* Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por CONACYT y DGEST.

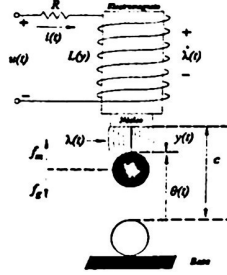


Figura 1. Sistema de suspensión o levitación magnética (MagLev).

Donde $u(t)$ [V] es la tensión de control, $i(t)$ [A] es la corriente, $\dot{\lambda}(t)$ [V] es la tensión inducida, $\lambda(t)$ [Wb] es el enlace de flujo del entrehierro, R [Ω] es la resistencia del alambrado, f_m [N] es la fuerza de atracción, $f_g = mg$ [N] es la fuerza debida a la gravedad de la tierra, m [kg] es la masa de la esfera, g [$\frac{m}{s^2}$] es la constante de gravedad, $y(t) = c - \theta(t)$ [m] es la posición de la esfera, y la constante c representa el entrehierro nominal, (véase la Figura 1). La inductancia del sistema se define en la referencia [5] como $L(y) = L_\infty + \frac{k}{y_o + y(t)}$ [H], donde L_∞ [H] es la inductancia propia del electromagneto cuando la esfera se coloca en el infinito, y_o [m] es un coeficiente de desplazamiento. Para modelar la dinámica del MagLev, se recurre a la definición de la coenergía acumulada W'_m , la cual es una función de las variables de estado $i(t)$ e $y(t)$ [1], y se expresa como $W'_m(i, y) = \frac{1}{2}L(y)i^2(t)$. La fuerza de atracción magnética producida por el electromagneto se define como $f_m = \frac{\partial W'_m(i, y)}{\partial y}$, desarrollando la expresión anterior, se tiene que,

$$f_m = -\frac{k}{2} \frac{i^2(t)}{[y_o + y(t)]^2} \quad (1)$$

donde k [$\frac{Nm^2}{A^2}$] es la constante de fuerza del electromagneto.

La relación entre $\lambda(t)$ e $i(t)$ se define como $\lambda(t) = L(y)i(t)$ [1]. Para simplificar el modelo se formula la hipótesis:

$$L(y)|_{y=y_*} = L_* = L_\infty + \frac{k}{y_o + y_*} \quad (2)$$

donde y_* [m] es la posición de equilibrio o de operación de la esfera. Aplicando ley de tensiones de Kirchhoff del circuito eléctrico, se tiene que $u(t) = Ri(t) + L_* \frac{di(t)}{dt}$. El movimiento o desplazamiento de la esfera móvil es modelado mediante la suma de fuerzas aplicadas al centroide de la esfera y recurriendo a la segunda ley de movimiento de Newton $m\ddot{y}(t) = f_m + f_g$ (ver Figura 1). Utilizando las expresiones anteriores el modelo no lineal en términos del vector de estado $x(t) = [y(t) \ i(t) \ \dot{y}(t)]^T$ se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ i(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \frac{1}{L_*} [u(t) - Ri(t)] \\ -\frac{k}{2m} \frac{i^2(t)}{[y_o + y(t)]^2} + g \end{bmatrix} \quad (3)$$

La ecuación (3) es un caso particular del modelo lagrangiano del MagLev presentado en [5]. Los parámetros en el punto de equilibrio son: $\dot{y}_* = 0$ [$\frac{m}{s}$], $L_* = L_\infty + \frac{k}{y_o + y_*}$ [H], $u_* = Ri_*$ [V] y $i_* = k_{ff}(y_o + y_*)$ [A]. Donde $k_{ff} = \sqrt{\frac{2mg}{k}}$ [$\frac{A}{m}$], es la constante de precompensación de corriente. El punto de equilibrio en malla abierta se expresa como $x_* = [y_* \ i_* \ 0]^T$ con $u(t) = u_*$ [V] constante.

Aplicando una linealización aproximada del modelo no lineal expresado en la forma $\dot{x} = f(x, u)$ en (3), utilizando la serie de *Taylor* truncada, evaluada en el punto de equilibrio x_* , se obtiene un modelo lineal aproximado en la forma $\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$, que de forma explícita resulta ser:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta i(t) \\ \delta \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-R}{L_*} & 0 \\ \frac{-2g}{y_o + y_*} & \frac{-2i_*}{L_*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta i(t) \\ \delta \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_*} \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(t) \quad (4)$$

A partir de la ecuación de estado (4), se obtiene la función de transferencia (FDT) en lazo abierto del MagLev (5), la cual es claramente inestable:

$$G_{LA}(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \left[\frac{k_{cdc}}{\sigma_c s + 1} \right] \left[\frac{-k_{bdc} \omega_b^2}{s^2 - \omega_b^2} \right] \quad (5)$$

los parámetros del sistema linealizado son: $k_{cdc} = \frac{1}{R}$ [$\frac{A}{V}$], $\sigma_c = \frac{L_*}{R}$ [s] (parámetros de la dinámica eléctrica), y $k_{bdc} = \sqrt{\frac{k}{2mg}}$ [$\frac{m}{A}$], $\omega_b = \sqrt{\frac{2g(L_* - L_\infty)}{k}}$ [$\frac{rad}{s}$] (parámetros de la dinámica electromecánica).

Los valores numéricos de los parámetros del sistema MagLev [9] son: $y_* = 7 \times 10^{-3}$ [m], $m = 0.068$ [kg], $g = 9.81$ [$\frac{m}{s^2}$], $R = 11$ [Ω], $c = 0.014$ [m], $y_o = 2 \times 10^{-3}$ [m], $k_{ff} = 142.9292$ [$\frac{A}{m}$], $L_\infty = 363$ [mH] y $k = 6.5308 \times 10^{-5}$ [$\frac{Nm^2}{A^2}$].

3. Objetivo de control

El objetivo de control es encontrar una señal $u(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e(t) = 0$, donde $y_e(t) = y_d(t) - y(t)$ es el error de posición y $y_d(t)$ es la posición deseada de la esfera metálica.

4. Ley de control PID en modo fuerza

Este controlador está formado por dos controladores conectados en cascada, uno es de tipo PID de posición y el otro es de tipo PI de corriente, la estructura del controlador se muestra en la Figura 2. La ley de control se expresa como

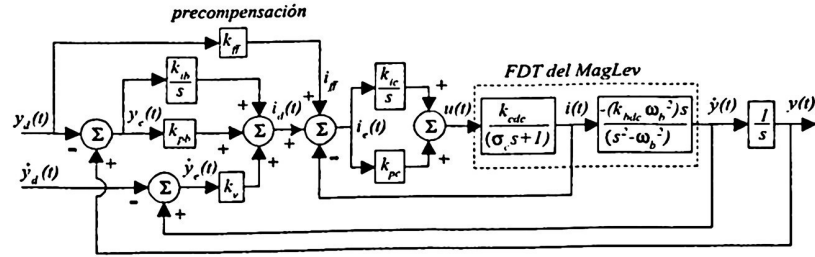


Figura 2. Sistema de control PID en modo fuerza.

$$u_v(t) = k_{pc}i_c(t) + k_{ic} \int i_e(t)dt \quad (6)$$

$$i_e(t) = u_c(t) - i(t) \quad (7)$$

$$u_c(t) = i_d(t) + k_{ff}y_d \quad (8)$$

$$i_d(t) = k_{pb}y_e(t) + k_{ib} \int y_e(t)dt + k_v\dot{y}_e(t) \quad (9)$$

donde $u_c(t)$ es la corriente calculada por la ley de control PID más el término de precompensación de fuerza expresado como $i_{ff} = k_{ff}y_d$, $i_d(t)$ es la corriente dinámica del posicionamiento deseado e $i_e(t)$ es el error de corriente del lazo de control interno PI. La variable $u_v(t) = u(t)$ representa la tensión de control que se aplica al sistema MagLev, mientras que k_{pb} y k_{pc} son las ganancias proporcionales de posición y de corriente respectivamente, k_{ib} y k_{ic} son las ganancias integrales de posición y corriente respectivamente, y k_v es la ganancia de velocidad.

4.1. Sintonización del controlador interno PI de corriente

La sintonización de las ganancias k_{pc} y k_{ic} se realiza de tal manera que la dinámica electromagnética se desacople del controlador del PID de posición. Para la sintonización de las ganancias se utiliza el método de colocación de los polos de la FDT [9].

La FDT del controlador PI se expresa como (ver la Figura 3 del lado izquierdo):

$$G_{CLC}(s) = \frac{\delta I(s)}{\delta I_d(s)} = \frac{\frac{k_{ic}}{L_*} \left[\left(\frac{k_{pc}}{k_{ic}} \right) s + 1 \right]}{s^2 + \left(\frac{R+k_{pc}}{L_*} \right) s + \left(\frac{k_{ic}}{L_*} \right)} \quad (10)$$

donde se puede identificar el siguiente polinomio característico:

$$P_c(s) = s^2 + \left(\frac{R+k_{pc}}{L_*} \right) s + \left(\frac{k_{ic}}{L_*} \right) \quad (11)$$

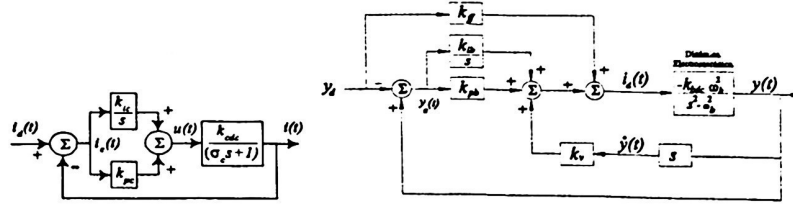


Figura 3. Controlador PI de corriente (izquierda), PID de posición (derecha).

que al compararlo con el polinomio característico deseado

$$Q_c(s) = s^2 + (-\alpha_{c1} - \alpha_{c2})s + \alpha_{c1}\alpha_{c2} = 0 \quad (12)$$

se obtiene el siguiente par de ecuaciones de sintonización:

$$k_{pc} = -(\alpha_{c1} + \alpha_{c2})L_s - R, \quad k_{ic} = \alpha_{c1}\alpha_{c2}L_s \quad (13)$$

Los valores obtenidos en la sintonización de ganancias son $k_{pc} = 100 \left[\frac{V}{A}\right]$, $k_{ic} = 70 \left[\frac{V}{A \cdot s}\right]$. Es importante notar que se debe cumplir la condición $k_{pc} > k_{ic}$, con el propósito de evitar una respuesta con sobrepaso de la corriente del electromagneto.

4.2. Sintonización del controlador PID de posición

Considerando el desacoplamiento de los controladores conectados en cascada, la ley de control $u_c(t)$ (de tipo PID) se puede aplicar directamente a la dinámica electromecánica del MagLev, (ver la Figura 3 del lado derecho). La FDT de lazo cerrado se expresa como:

$$G_{MLC}(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta Y_d(s)} = \frac{\left[\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right] \left[\left(\frac{k_{pb}-k_{ff}}{k_{ib}}\right)s + 1\right]}{s^3 + \left(\frac{2gk_v}{i_*}\right)s^2 + \left(\frac{2gk_{pb}}{i_*} - \frac{2g}{y_o + y_*}\right)s + \left(\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right)} \quad (14)$$

donde se identifica el siguiente polinomio característico de lazo cerrado:

$$P_b(s) = s^3 + \left(\frac{2gk_v}{i_*}\right)s^2 + \left(\frac{2gk_{pb}}{i_*} - \frac{2g}{y_o + y_*}\right)s + \left(\frac{2gk_{ib}}{i_*}\right) \quad (15)$$

que al compararlo con el siguiente polinomio característico deseado

$$Q_b(s) = s^3 + (-\alpha_{b1} - \alpha_{b2} - \alpha_{b3})s^2 + (\alpha_{b1}\alpha_{b2} + \alpha_{b1}\alpha_{b3} + \alpha_{b2}\alpha_{b3})s - \alpha_{b1}\alpha_{b2}\alpha_{b3} = 0 \quad (16)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones de sintonización

$$\begin{aligned} k_{pb} &= \frac{i_*(\alpha_{b1}\alpha_{b2} + \alpha_{b1}\alpha_{b3} + \alpha_{b2}\alpha_{b3} + \frac{2g}{y_o + y_*})}{2g} \\ k_v &= -\frac{i_*(\alpha_{b1} + \alpha_{b2} + \alpha_{b3})}{2g} \\ k_{ib} &= -\frac{i_*(\alpha_{b1}\alpha_{b2}\alpha_{b3})}{2g} \end{aligned} \quad (17)$$

Los valores obtenidos en la sintonización de ganancias son $k_{pb} = 380 \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$, $k_{ib} = 750 \left[\frac{\text{A}}{\text{s-m}} \right]$ y $k_v = 15 \left[\frac{\text{A-s}}{\text{m}} \right]$. La FDT de este sistema de control presenta la siguiente agrupación de polos y ceros dominantes

$$\frac{\delta Y(s)}{\delta Y_d(s)} = \frac{k\omega_n^2 \left(\frac{s}{\rho\omega_n} + 1 \right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (18)$$

donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada, σ_d es la constante de tiempo y ζ es el factor de amortiguamiento del sistema [3]. El coeficiente $\rho = k_{ib} [(k_{ff} + k_{pb})\omega_n]^{-1}$ designa una razón que especifica la magnitud del cero con respecto a ω_n , que puede afectar visiblemente la velocidad de subida y el sobre-paso máximo de la respuesta dinámica de posición del MagLev [4].

4.3. Respuesta del sistema en modo fuerza

En la Figura 4 (izquierda) se muestran las gráficas de la respuesta experimental en tiempo real del controlador PID (caso regulación) aplicado al sistema MagLev, y la respuesta simulada en el programa Simulink de MatLab (utilizando el modelo no lineal del MagLev). La posición deseada es un escalón de 2 [mm] de amplitud, con $f = 0.2$ [Hz]. La condición inicial es: $\left[0.0065[\text{m}] \quad i_*[\text{A}] \quad 0\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \right]^T$. La frecuencia de muestreo para el cálculo numérico en tiempo real del controlador se asignó en $f_s = 1$ KHz. En la Figura 4 (derecha) se muestra la respuesta experimental del sistema de control PID en tiempo real (caso seguimiento), donde se observa que el objetivo de control se cumple en un intervalo de tiempo relativamente rápido. En la Figura 4 (en ambos casos) se observa que hay un sesgo apreciable entre la gráfica experimental y simulada de las variables $i(t)$ y $u(t)$ en régimen estacionario, lo cual se debe a la corriente de magnetización del núcleo ferromagnético del electromagneto, cuyo efecto no está agregado en el modelo no lineal del sistema MagLev.

5. Controlador PID en modo velocidad

En la Figura 5 se muestra la estructura del controlador PID en modo velocidad, esta ley de control agrega un controlador interno de velocidad tipo PI con prealimentación. Este tipo de estructura es utilizada en el control de servomotores de cc, por lo que su aplicación en un sistema de suspensión magnética resulta interesante y es validada aquí mediante resultados experimentales. La ley de control definida en la Figura 5 se expresa como

$$u(t) = k_{pc}i_e(t) + k_{ic} \int i_e(t)dt \quad (19)$$

$$i_d(t) = k_v v_e(t) + k_{iv} \int v_e(t)dt + k_{ff} y_d(t) \quad (20)$$

$$v_d(t) = k_{pb} y_e(t) \quad (21)$$

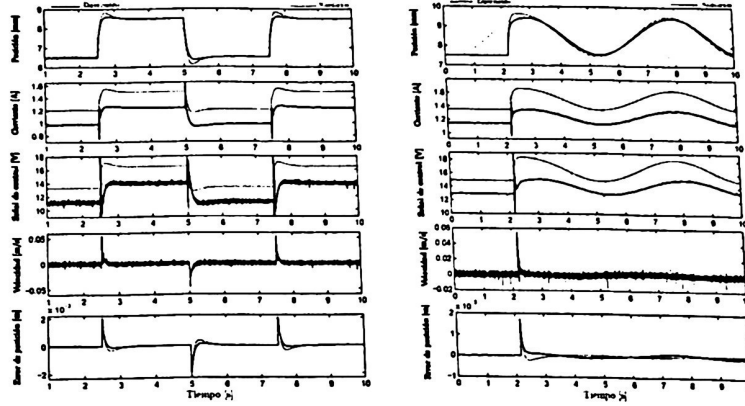


Figura 4. Respuesta del sistema, caso regulación (izquierda), caso seguimiento (derecha).

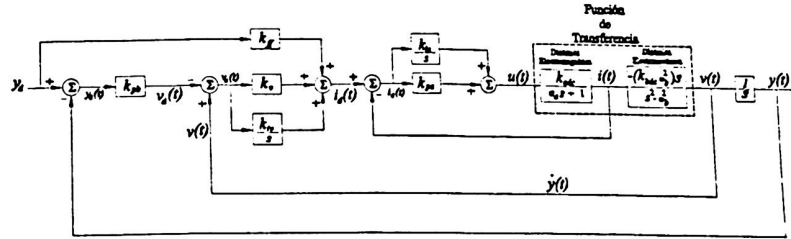


Figura 5. Controlador PID en modo velocidad.

donde $v_e(t) = v(t) - v_d(t)$ es el error de velocidad, $v(t) = \dot{y}(t)$ es la velocidad de la esfera, k_v es la ganancia proporcional de velocidad, k_{ib} es la ganancia integral de velocidad y k_{pb} la ganancia proporcional de posición. La ley de control PID en modo velocidad se puede reescribir al sustituir el error de velocidad $v_e(t)$, junto con $v_d(t)$ en la ecuación (19) y con algunas manipulaciones algebraicas, obteniéndose la siguiente expresión

$$i_d(t) = -k_p y_e(t) - k_i \int y_e(t) dt + k_v \dot{y}(t) + k_{ff} y_d(t) \quad (22)$$

donde $k_p = k_v k_{pb} + k_{iv}$, $k_i = k_{iv} k_{pb}$ y k_v son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente del controlador PID. En esta sección ya no se detalla la sintonización de las ganancias del lazo de control interno PI de corriente ya que resulta ser la misma que la del controlador PID en modo fuerza.

5.1. Sintonización del controlador interno PI de velocidad

La sintonización de este controlador se realizó utilizando la técnica de colocación de polos con controlador mostrado en la Figura 6 (izquierda).

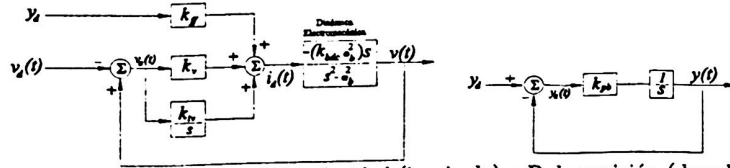


Figura 6. Controlador PI de velocidad (izquierda) y P de posición (derecha)

La ley de control PI se suma con el término $i_{ff} = k_{ff}y_d(t)$ de precompensación de corriente o fuerza y se aplica a la dinámica electromecánica. La FDT del sistema de control PI de velocidad se expresa como

$$G_{VLC}(s) = \frac{\delta V(s)}{\delta V_d(s)} = \frac{\frac{2g(k_{ib}-k_{ff})}{i_*} \left[\left(\frac{k_v}{k_{ib}-k_{ff}} \right) s + 1 \right]}{s^2 + k_v \frac{2g}{i_*} s + \left(\frac{k_{ib}}{i_*} - \frac{1}{y_0+y_*} \right) 2g} \quad (23)$$

donde se puede identificar el siguiente polinomio característico de lazo cerrado de segundo orden:

$$P_v(s) = s^2 + k_v \frac{2g}{i_*} s + \left(\frac{k_{ib}}{i_*} - \frac{1}{y_0+y_*} \right) 2g \quad (24)$$

el polinomio característico deseado se expresa como:

$$Q_v(s) = s^2 + (-\alpha_{v1} - \alpha_{v2})s + \alpha_{v1}\alpha_{v2} \quad (25)$$

haciendo una analogía entre (25) y (24) se tienen las siguientes ganancias de sintonización

$$k_v = (-\alpha_{v1} - \alpha_{v2}) \frac{i_*}{2g} \quad (26)$$

$$k_{ib} = i_* \left[\frac{\alpha_{v1}\alpha_{v2}}{2g} + \frac{1}{y_0+y_*} \right] \quad (27)$$

Las valores resultantes de la sintonización de ganancias son : $k_{pb} = 20 \left[\frac{1}{s} \right]$, $k_v = 10 \left[\frac{A-s}{m} \right]$, $k_{ib} = 500 \left[\frac{A}{m} \right]$, $k_{pc} = 500 \left[\frac{V}{A} \right]$, $k_{ic} = 70 \left[\frac{V}{A-s} \right]$. El valor de la ganancia k_{pb} se obtiene de la FDT del controlador de posición (desacoplado) $\frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{1}{\tau_b s + 1}$, tal y como se muestra en la Figura 6 (derecha), $k_{pb} = \frac{1}{\tau_b}$, τ_b es la constante de tiempo de posición.

5.2. Respuesta del sistema en modo velocidad

En la Figura 7 (izquierda) se muestran las gráficas de la respuesta experimental en tiempo real del sistema de control PID (caso de regulación), en donde se observa que la posición de la esfera presenta un comportamiento dinámico de primer orden. Se observa que la posición de la esfera alcanza a la posición deseada en un tiempo relativamente rápido y se puede apreciar que el error en régimen estacionario tiende a cero, cumpliéndose así el objetivo de control.

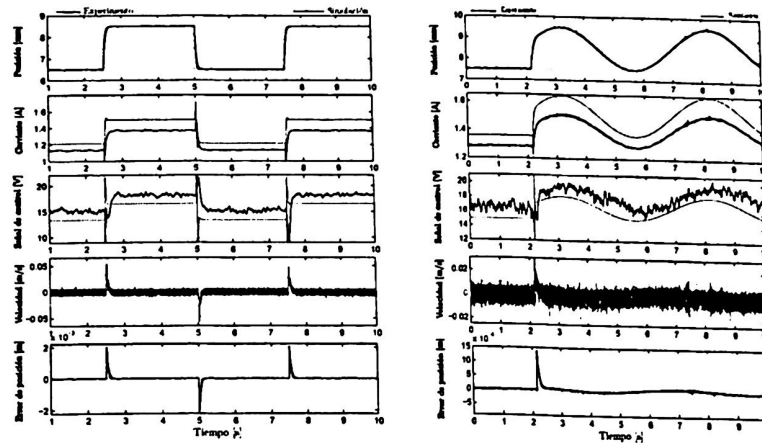


Figura 7. Respuesta del sistema, caso regulación (izquierda), caso seguimiento (derecha).

Mientras que en la Figura 7 (derecha) se muestran las gráficas de la respuesta en tiempo real del sistema para el caso seguimiento, donde se observa claramente que el sistema de control PID en modo velocidad cumple con el objetivo de control de forma satisfactoria.

6. Conclusiones

La validación experimental de los dos controladores tipo PID aplicados en el sistema MagLev, demuestra que la respuesta de posición del sistema es satisfactoria, ya que el error de posición cumple el objetivo de control (ver la Figura 8). Los resultados de simulación obtenidos a partir del modelo dinámico son razonablemente parecidos a la respuesta experimental del sistema. Si las respuestas de los errores de posición de ambos controladores son comparadas (ver la Figura 8), es evidente que el controlador PID en modo velocidad no presenta sobrepaso y su dinámica es más rápida, por lo que puede ser considerado como el controlador de mejor desempeño, en comparación con el controlador PID en modo fuerza.

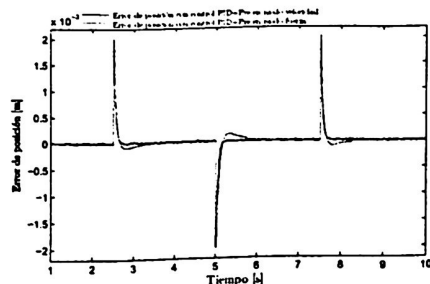


Figura 8. Errores de posición, caso regulación.

Referencias

1. A. E. Fitzgerald, Ch. Kingsley Jr. & A. Kusko, *Electric Machinery*. Third Edition. The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion, pp. 2-5, pp. 8-11, pp. 86-95 1971.
2. W. Hurley, W. Wölfe, (1997). *Electromagnetic Design of Magnetic Suspension System*. IEEE Transactions on Education, Vol. 40, No. 2, pp. 124-130, May 1997.
3. B. C. Kuo, (1994). *Automatic Control Systems*. Prentice Hall, 1994.
4. P. H. Lewis, Chang Yang, (1999). *Basic Control Systems Engineering*. Prentice Hall, 1997.
5. R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland & B. Maschke, (2000). *Dissipative systems analysis and control*. Springer-Verlag London, 2000.
6. J. Ollervides, A. Ruelas, V. Santibáñez & A. Sandoval, (2005). *Evaluación Experimental de Controladores Lineales y No Lineales en el Sistema de Levitación Magnética MagLev*. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Cuernavaca, Morelos México, Oct. 2005.
7. J. Ollervides, V. Santibáñez, (2006). *Control Borroso de un Sistema de Suspensión Magnética*. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, UNAM, México D.F., Oct. 2006.
8. R. Ortega, A.J. van der Schaft, I. Mareels & B. Maschke, (2001). *Putting Energy Back in Control*. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 21 pp. 18-33 Abril 2001.
9. Quanser Consulting Magnetic Levitation (MagLev), (2003). *Instructor Manual, Specialty Experiment: PIV-plus-Feedforward Control*. Quanser Innovate Educate, 2003.
10. H. Rodríguez, R. Ortega, & H. Siguerdidjane *Experimental comparison of Linear and Nonlinear Controllers for a Magnetic Suspension*. Anchorage, Alaska, USA, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications, September pp. 25-27, 2000.
11. Y. S. Shiao *Design and Implementation of a Controller for a Magnetic Levitation System*. Proc. Natl. Sci. Coun. ROC(D), Vol. 11, No. 2, pp. 88-94, 2001.